

ON INDEFINITE INTEGRAL (EJEMPLOS)



ALFREDO PÉREZ HERNÁNDEZ

DEFINICIÓN MATEMÁTICA

La definición matemática de la Integral Indefinida es:

$$\therefore \int f(x) dx = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[f \left(x - \frac{xk}{n} \right) \right] \times \left(\frac{x}{n} \right) \right\} \right\} + C$$

NOTA: La deducción de esta definición matemática aparece en Youtube, cuyo QR es este:



APLICACIONES

I. CÁLCULO DE ANTIDERIVADAS

1) Halle la antiderivada de:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Para el punto $(x,y)=(1,2)$

Sol...



Figura 1:

Fuente: Elaboración propia hecha con *Graphmatica*

Por lo que:

$$\frac{d^{-1}}{dx^{-1}} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^{-1}}{dx^{-1}} (2x)$$

$$\frac{d^{-1}}{dx^{-1}} \left(\frac{d^1 y}{dx^1} \right) = \frac{d^{-1}}{dx^{-1}} (2x)$$

$$\frac{d^{-1+1}}{dx^{-1+1}} y = d^{-1} (2x) \cdot dx^1$$

$$\frac{d^0}{dx^0} y = d^{-1}(2x). dx^1$$

$$y = \int 2x dx \dots\dots\dots (8)$$

De acuerdo a la definición:

$$\rightarrow \int f(x) dx = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[f \left(x - \frac{xk}{n} \right) \right] \right) \times \left(\frac{x}{n} \right) \right\} \right\} + C$$

$$\int 2x dx = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[2 \left(x - \frac{xk}{n} \right) \right] \right) \times \left(\frac{x}{n} \right) \right\} \right\} + C$$

$$\int 2x dx = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[2 \left(x - \frac{xk}{n} \right) \right] \right) \times \left(\frac{x}{n} \right) \right\} \right\} + C$$

Haciendo por partes:

PRIMERO LA PARTE ROJA - REFERENTE A LA SUMATORIA:

$$\rightarrow \left\{ \sum_{k=1}^n \left[2 \left(x - \frac{xk}{n} \right) \right] \right\}$$

$$\sum_{k=1}^n \left[2 \left(x - \frac{xk}{n} \right) \right]$$

$$\sum_{k=1}^n \left(2x - 2 \frac{xk}{n} \right)$$

$$\left[2x \sum_{k=1}^n (1) - 2 \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n k \right]$$

$$\left[2xn - 2 \frac{x}{n} \left(\frac{n^2 + n}{2} \right) \right]$$

$$\left[2xn - \left(\frac{x}{n} \right) (n^2 + n) \right]$$

$$\left[2xn - (x) \left(\frac{n^2 + n}{n} \right) \right]$$

$$\left[2xn - \left(\frac{xn^2 + xn}{n} \right) \right]$$

$$\left[2xn - \left(\frac{xn^2}{n} + \frac{xn}{n} \right) \right]$$

$$[2xn - (xn + x)]$$

$$(2xn - xn - x)$$

$$(xn - x) \dots\dots\dots (R1)$$

LUEGO LA PARTE MORADA - REFERENTE A LA

OPERACIÓN $\left(\frac{x}{n}\right)$:

Multiplicando el Resultado (R1) por la operación en color Morado:

$$(xn - x) \times \left(\frac{x}{n}\right)$$

$$\left[(xn) \left(\frac{x}{n}\right) - (x) \left(\frac{x}{n}\right) \right]$$

$$\left(x^2 - \frac{x^2}{n}\right) \dots\dots\dots (R2)$$

Aplicando el límite al Resultado (R2):

$$\left(x^2 - \frac{x^2}{n}\right) \dots\dots\dots (R2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x^2 - \frac{x^2}{n}\right)$$

$$\left[x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} (1) - x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$[x^2(1) - x^2(0)]$$

$$x^2$$

Por último hay que agregarle la Constante de Integración C, por lo que:

$$\rightarrow \int 2x \, dx = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[2 \left(x - \frac{xk}{n} \right) \right] \right) \times \left(\frac{x}{n} \right) \right\} \right\} + C$$

$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$

En la página 4, se vio que:

$$\rightarrow y = \int 2x \, dx \dots\dots\dots (\aleph)$$

Por lo que:

$$\rightarrow \int 2x \, dx = x^2 + C$$

$$y = x^2 + C$$

Sustituyendo la condición inicial $(x,y)=(1,2)$:

$$\rightarrow y = x^2 + C$$

$$2 = (1)^2 + C$$

$$2 = 1 + C$$

$$\therefore C = 1$$

Por lo que:

$$\rightarrow y = x^2 + C$$

$$\therefore y = x^2 + 1$$

HALLANDO LA ANTIDERIVADA CON EXCEL

$$\therefore \int f(x) dx = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[f \left(x - \frac{xk}{n} \right) \right] \right) \times \left(\frac{x}{n} \right) \right\} \right\} + C$$

Para este caso ***n*** debe de ser un número muy grande a fin de hacer tender a ***infinito***, para este caso hagamos que ***n*** sea cien mil, por lo que:

$$\mathbf{n=100,000}$$

Retomando el ejemplo anterior:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Para el punto **(*x*,*y*)=(1,2)**

$$\mathbf{x=1}$$

En una Tabla Excel se pone lo siguiente:

	A	B	C	D	E
1	n	100000			
2	x	1			
3	(x/n)	=(B2/B1)			
4	k				
5					

Quedará del siguiente modo:

	A	B	C	D	E
1	n	100000			
2	x	1			
3	(x/n)	0.00001			
4	k				
5					

1) En la celda A4 hay que poner una letra **k** que representará los valores que tomará **k** desde 1 hasta **n** que será 100,000.

Por lo que en la celda A5 hay que poner:

	A	B	C	D	E
1	n	100000			
2	x	1			
3	(x/n)	0.00001			
4	k				
5					

=SEQUENCE(100000,1,1,1), esto significa que:

- ❖ Va a ver 100,000 valores (número de Filas) para k desde el 1 hasta llegar a $n=100,000$.
- ❖ En 1 sola columna.
- ❖ Empezando desde el número 1.
- ❖ Haciendo pasos de uno en uno hasta llegar a $n=100,000$.

	A	B	C	D	E
1	n	100000			
2	x	1			
3	(x/n)	0.00001			
4	k				
5	=SEQUENCE(100000,1,1,1)				

Quedará del siguiente modo:

	A	B	C	D	E
1	n	100000			
2	x	1			
3	(x/n)	0.00001			
4	k				
5	1				
6	2				
7	3				
100002	99,998				
100003	99,999				
100004	100000				

Una vez que hayamos obtenido **k** que va desde 1 hasta 100,000, posteriormente en la celda B4 se pondrá el nombre **Argumento** que representará a la expresión:

$$\left(x - \frac{xk}{n}\right)$$

Quedará del siguiente modo:

	A	B	C	D	E
1	n	100000			
2	x	1			
3	(x/n)	0.00001			
4	k	Argumento			
5	1				
6	2				
7	3				
100002	99,998				
100003	99,999				
100004	100000				

La expresión:

$$\left(x - \frac{xk}{n}\right)$$

Se representará en Excel en la celda B5 como:

=(B\$2-(B\$3)*(A5))

Esto quedará como:

	A	B	C	D	E
1	n	100000			
2	x	1			
3	(x/n)	0.00001			
4	k	Argumento			
5	1	0.99999			
6	2				
7	3				
100002	99,998				
100003	99,999				
100004	100000				

Al rellenar las demás celdas de la fila B, se tiene lo siguiente:

	A	B	C	D	E
1	n	100000			
2	x	1			
3	(x/n)	0.00001			
4	k	Argumento			
5	1	0.99999			
6	2	0.99998			
7	3	0.99997			
100002	99,998	0.00002			
100003	99,999	0.00001			
100004	100000	0			

De acuerdo a:

$$\rightarrow \int 2x \, dx = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[2 \left(x - \frac{xk}{n} \right) \right] \right) \times \left(\frac{x}{n} \right) \right\} \right\} + C$$

$$\int 2x \, dx = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[2 \left(x - \frac{xk}{n} \right) \right] \right) \times \left(\frac{x}{n} \right) \right\} \right\} + C$$

De acuerdo a lo anterior el **Argumento** debe estar multiplicado por dos. Por lo que en la tabla en la celda C4 se pone **2XArgumento**.

En la celda C5 se multiplica el valor de B5 por 2 ($=2*B5$) y luego se rellenan las demás celdas de abajo:

	A	B	C	D	E
1	n	100000			
2	x	1			
3	(x/n)	0.00001			
4	k	Argumento	2XArgumento		
5	1	0.99999	=2*B5		
6	2	0.99998			
7	3	0.99997			
100002	99,998	0.00002			
100003	99,999	0.00001			
100004	100000	0			

Por lo que quedaría como:

	A	B	C	D	E
1	n	100000			
2	x	1			
3	(x/n)	0.00001			
4	k	Argumento	2XArgumento		
5	1	0.99999	1.99998		
6	2	0.99998	1.99996		
7	3	0.99997	1.99994		
100002	99,998	0.00002	0.00004		
100003	99,999	0.00001	0.00002		
100004	100000	0	0		
100005					

En la celda B100005 ponga SUMATORIA

En la celda C100005 SUME los valores que se obtuvieron de la celda C5 a la celda C100004.

Queda de este modo:

	A	B	C	D	E
1	n	100000			
2	x	1			
3	(x/n)	0.00001			
4	k	Argumento	2XArgumento		
5	1	0.99999	1.99998		
6	2	0.99998	1.99996		
7	3	0.99997	1.99994		
100002	99,998	0.00002	0.00004		
100003	99,999	0.00001	0.00002		
100004	100000	0	0		
100005		SUMATORIA	=SUM(C5:C100004)		

	A	B	C	D	E
1	n	100000			
2	x	1			
3	(x/n)	0.00001			
4	k	Argumento	2XArgumento		
5	1	0.99999	1.99998		
6	2	0.99998	1.99996		
7	3	0.99997	1.99994		
100002	99,998	0.00002	0.00004		
100003	99,999	0.00001	0.00002		
100004	100000	0	0		
100005		SUMATORIA	99,999		
100006					

Ahora en la celda B100006 escriba **Resultado**.

En la celda C100006 multiplique el valor numérico de la Sumatoria por (x/n) que es en Excel la celda B3.

	A	B	C	D	E
1	n	100000			
2	x	1			
3	(x/n)	0.00001			
4	k	Argumento	2XArgumento		
5	1	0.99999	1.99998		
6	2	0.99998	1.99996		
7	3	0.99997	1.99994		
100002	99,998	0.00002	0.00004		
100003	99,999	0.00001	0.00002		
100004	100000	0	0		
100005		SUMATORIA	99,999		
100006		RESULTADO	0.99999		
100007					
100008					

De acuerdo a:

$$\rightarrow \int f(x) dx = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[f \left(x - \frac{xk}{n} \right) \right] \right) \times \left(\frac{x}{n} \right) \right\} \right\} + C$$

También es:

$$y = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[f \left(x - \frac{xk}{n} \right) \right] \right) \times \left(\frac{x}{n} \right) \right\} \right\} + C$$

Por lo que:

$$C = y - \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[f \left(x - \frac{xk}{n} \right) \right] \right) \times \left(\frac{x}{n} \right) \right\} \right\}$$

En la celda B100008 escriba **C** que sería la *Constante de Integración*.

Se sabe que **y=2** [Para el punto (x,y)=(1,2)], por lo que en la celda C100008, resté el valor de 2 menos el valor del **Resultado**:

	A	B	C	D	E
1	n	100000			
2	x	1			
3	(x/n)	0.00001			
4	k	Argumento	2XArgumento		
5	1	0.99999	1.99998		
6	2	0.99998	1.99996		
7	3	0.99997	1.99994		
100002	99,998	0.00002	0.00004		
100003	99,999	0.00001	0.00002		
100004	100000	0	0		
100005		SUMATORIA	99,999		
100006		RESULTADO	0.99999		
100007					
100008		C	=2-C100006		

Por lo que finalmente:

	A	B	C	D	E
1	n	100000			
2	x	1			
3	(x/n)	0.00001			
4	k	Argumento	2XArgumento		
5	1	0.99999	1.99998		
6	2	0.99998	1.99996		
7	3	0.99997	1.99994		
100002	99,998	0.00002	0.00004		
100003	99,999	0.00001	0.00002		
100004	100000	0	0		
100005		SUMATORIA	99,999		
100006		RESULTADO	0.99999		
100007					
100008		C	1.00001		

Que es un resultado muy aproximado al valor de la **Constante de Integración $C=1$** . Si se hubiese elegido un **$n=1,000,000$** el valor obtenido en Excel se hubiese acercado más al valor de **C** que es **1**.

II. CÁLCULO DE ÁREAS

1) Halle:

$$\int_0^1 e^x dx$$

Sol...Para hallar una Integral Definida mediante la Definición de Integral Indefinida, se utiliza la siguiente expresión:

	$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[f \left(b - \frac{bk}{n} \right) \right] \right) \times \left(\frac{b}{n} \right) \right\} \right\}$
(-)	$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[f \left(a - \frac{ak}{n} \right) \right] \right) \times \left(\frac{a}{n} \right) \right\} \right\}$
(=)	$\int_a^b f(x) dx$

	$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[e^{\left(1 - \frac{k}{n} \right)} \right] \right) \times \left(\frac{1}{n} \right) \right\} \right\}$
(-)	$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[e^{\left(0 - \frac{0.k}{n} \right)} \right] \right) \times \left(\frac{0}{n} \right) \right\} \right\}$
(=)	$\int_0^1 e^x dx$

$$\int_0^1 e^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[e^{\left(1 - \frac{k}{n}\right)} \right] \right) \times \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$$

Analizando el término:

$$\sum_{k=1}^n \left[e^{\left(1 - \frac{k}{n}\right)} \right] = e^{\left(1 - \frac{1}{n}\right)} + e^{\left(1 - \frac{2}{n}\right)} + e^{\left(1 - \frac{3}{n}\right)} + \dots$$

$$\sum_{k=1}^n \left[e^{\left(1 - \frac{k}{n}\right)} \right] = \frac{e^{(1)}}{e^{\left(\frac{1}{n}\right)}} + \frac{e^{(1)}}{e^{\left(\frac{2}{n}\right)}} + \frac{e^{(1)}}{e^{\left(\frac{3}{n}\right)}} + \dots$$

$$\sum_{k=1}^n \left[e^{\left(1 - \frac{k}{n}\right)} \right] = e^1 \left\{ \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{n}\right)}} + \frac{1}{e^{\left(\frac{2}{n}\right)}} + \frac{1}{e^{\left(\frac{3}{n}\right)}} + \dots \right\}$$

$$\sum_{k=1}^n \left[e^{\left(1 - \frac{k}{n}\right)} \right] = e^1 \left\{ e^{-\left(\frac{1}{n}\right)} + e^{-\left(\frac{2}{n}\right)} + e^{-\left(\frac{3}{n}\right)} + \dots \right\}$$

$$\rightarrow r = \frac{e^{-\left(\frac{2}{n}\right)}}{e^{-\left(\frac{1}{n}\right)}} \equiv r = e^{-\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\rightarrow r = \frac{e^{-\left(\frac{3}{n}\right)}}{e^{-\left(\frac{2}{n}\right)}} \equiv r = e^{-\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^n \left[e^{\left(1 - \frac{k}{n}\right)} \right] = e^1 \left\{ e^{-\left(\frac{1}{n}\right)} + e^{-\left(\frac{2}{n}\right)} + e^{-\left(\frac{3}{n}\right)} + \dots \right\}$$

$$\sum_{k=1}^n \left[e^{\left(1 - \frac{k}{n}\right)} \right] = e^1 \left\{ \frac{1 - \left[e^{-\left(\frac{1}{n}\right)} \right]^n}{1 - e^{-\left(\frac{1}{n}\right)}} \right\}$$

$$\sum_{k=1}^n \left[e^{\left(1-\frac{k}{n}\right)} \right] = e^1 \left[\frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-\left(\frac{1}{n}\right)}} \right]$$

$$\sum_{k=1}^n \left[e^{\left(1-\frac{k}{n}\right)} \right] = e^1 (1 - e^{-1}) \left[\frac{1}{1 - e^{-\left(\frac{1}{n}\right)}} \right]$$

$$\sum_{k=1}^n \left[e^{\left(1-\frac{k}{n}\right)} \right] = (e^1 - 1) \left[\frac{1}{1 - e^{-\left(\frac{1}{n}\right)}} \right]$$

$$\rightarrow \int_0^1 e^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[e^{\left(1-\frac{k}{n}\right)} \right] \right) \times \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$$

$$\int_0^1 e^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (e^1 - 1) \left[\frac{1}{1 - e^{-\left(\frac{1}{n}\right)}} \right] \times \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$$

$$\int_0^1 e^x dx = (e^1 - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{1}{1 - e^{-\left(\frac{1}{n}\right)}} \right] \times \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$$

$$\int_0^1 e^x dx = (e^1 - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{-1}}{1 - e^{-\left(\frac{1}{n}\right)}} \right]$$

Aplicando L'Hôpital:

$$\int_0^1 e^x dx = (e^1 - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\frac{d}{dn} (n^{-1})}{\frac{d}{dn} \left[1 - e^{-\left(\frac{1}{n}\right)} \right]} \right\}$$

$$\int_0^1 e^x dx = (e^1 - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{-n^{-2}}{\left[-e^{-\left(\frac{1}{n}\right)} \right] (n^{-2})} \right\}$$

$$\int_0^1 e^x dx = (e^1 - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\left[e^{-\left(\frac{1}{n}\right)} \right]} \right\}$$

$$\int_0^1 e^x dx = (e^1 - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\int_0^1 e^x dx = (e^1 - 1)(1)$$

$$\therefore \int_0^1 e^x dx = e^1 - 1$$

2) Halle:

$$\int_0^1 e^{-x} dx$$

Sol...

$$\int_0^1 e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \left[e^{-\left(1-\frac{k}{n}\right)} \right] \right) \times \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$$

Analizando el término:

$$\sum_{k=1}^n \left[e^{-\left(1-\frac{k}{n}\right)} \right] = e^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)} + e^{-\left(1-\frac{2}{n}\right)} + e^{-\left(1-\frac{3}{n}\right)} + \dots$$

$$\sum_{k=1}^n \left[e^{-\left(1-\frac{k}{n}\right)} \right] = \frac{e^{\left(\frac{1}{n}\right)}}{e^1} + \frac{e^{\left(\frac{2}{n}\right)}}{e^1} + \frac{e^{\left(\frac{3}{n}\right)}}{e^1} + \dots$$

$$\sum_{k=1}^n \left[e^{-\left(1-\frac{k}{n}\right)} \right] = \frac{1}{e^1} \left[e^{\left(\frac{1}{n}\right)} + e^{\left(\frac{2}{n}\right)} + e^{\left(\frac{3}{n}\right)} + \dots \right]$$

$$\rightarrow r = \frac{e^{\left(\frac{2}{n}\right)}}{e^{\left(\frac{1}{n}\right)}} \equiv r = e^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\rightarrow r = \frac{e^{\left(\frac{3}{n}\right)}}{e^{\left(\frac{2}{n}\right)}} \equiv r = e^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^n \left[e^{-\left(1-\frac{k}{n}\right)} \right] = \frac{1}{e^1} \left\{ \frac{\left[e^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right]^n - 1}{\left[e^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right] - 1} \right\}$$

$$\sum_{k=1}^n \left[e^{-\left(1-\frac{k}{n}\right)} \right] = \frac{1}{e^1} \left\{ \frac{e^1 - 1}{\left[e^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right] - 1} \right\}$$

$$\sum_{k=1}^n \left[e^{-\left(1-\frac{k}{n}\right)} \right] = \frac{(e^1 - 1)}{e^1} \left\{ \frac{1}{\left[e^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right] - 1} \right\}$$

$$\sum_{k=1}^n \left[e^{-\left(1-\frac{k}{n}\right)} \right] = (1 - e^{-1}) \left\{ \frac{1}{\left[e^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right] - 1} \right\}$$

$$\rightarrow \int_0^1 e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left\{ \sum_{k=1}^n \left[e^{-\left(1-\frac{k}{n}\right)} \right] \right\} \times \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left\{ (1 - e^{-1}) \left\{ \frac{1}{\left[e^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right] - 1} \right\} \right\} \times \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx = (1 - e^{-1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\left\{ \left[e^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right] - 1 \right\}} \times \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx = (1 - e^{-1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{-1}}{e^{\left(\frac{1}{n}\right)} - 1} \right]$$

Aplicando L'Hôpital:

$$\rightarrow \int_0^1 e^{-x} dx = (1 - e^{-1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{-1}}{e^{\left(\frac{1}{n}\right)} - 1} \right]$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx = (1 - e^{-1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\frac{d}{dn}(n^{-1})}{\frac{d}{dn} \left[e^{\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \right]} \right\}$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx = (1 - e^{-1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\frac{d}{dn}(n^{-1})}{\left[\frac{d}{dn} e^{\left(\frac{1}{n}\right)} - \frac{d}{dn}(1) \right]} \right\}$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx = (1 - e^{-1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{-(n^{-2})}{\left[e^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right] (-n^{-2})} \right\}$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx = (1 - e^{-1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{e^{\left(\frac{1}{n}\right)}} \right]$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx = (1 - e^{-1})(1)$$

$$\therefore \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}$$

